Cadre : Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I $\mathbb{C}$-dérivabilité

Définition 1. Soient $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe. On note $f'(a)$ cette limite.

Proposition 2. *Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, alors f est continue en a.*

Définition 3. f est dite holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemple 4. $\forall n \in \mathbb{N}, (z \mapsto z^n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(z \mapsto \frac{1}{z}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\star)$

Contre-exemple 5. $(z \mapsto \overline{z}) \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Proposition 6. *(i) $\mathcal{H}(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{C}^\Omega$.*

(ii) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^\star$, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(iii) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega')$ avec $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Corollaire 7. *Si $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors $f(z)$ est holomorphe sur $D(0, R)$.*

Théorème 8. *La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ où $z = x + iy$, est holomorphe si, et seulement si, u et v sont différentiables sur Ω et vérifient les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Corollaire 9. *Si $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.*

II Propriétés des fonctions holomorphes

1) Chemin

Définition 10. On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On parle de lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemple 11. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, alors une paramétrisation du cercle de centre z_0 et de rayon r est donnée par :*

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + re^{2i\pi t} \end{array} \right.$$

Définition 12. Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur $\text{Im}(\gamma)$, alors on définit :

$$\forall z \in \text{Im}(\gamma), \int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Exemple 13. *Si $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$, alors $\int \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2i\pi$.*

2) Formule de Cauchy

Théorème 14. *Soient Ω un ouvert convexe et $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, alors pour tout lacet γ de Ω, on a $\int_\gamma f = 0$.*

Définition 15. Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. On définit l'indice $\text{Ind}_\gamma(a)$ de a par rapport à γ par :

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$$

Proposition 16. $\text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$

Théorème 17 (Formule de Cauchy). *Soient Ω est un ouvert convexe, $z \in \Omega$, γ un lacet de $\Omega \setminus \{z\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors on a :*

$$\text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Exemple 18. *Si γ décrit le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct, alors $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = 0$ et $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi$.*

3) Conséquence de la théorie de Cauchy

Définition 19. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$, $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$.

Théorème 20. *Si f est holomorphe sur Ω, alors f est analytique sur Ω.*

Corollaire 21. *Une fonction holomorphe sur Ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.*

Proposition 22 (Inégalité de Cauchy)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\overline{D(a,r)})$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}| \leqslant \frac{M}{r^n}$, où $M = \max\limits_{z \in \partial \overline{D(a,r)}} (|f(z)|)$.*

Théorème 23 (Liouville)**.** *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.*

Corollaire 24 (Théorème de d'Alembert)**.** *Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.*

Théorème 25. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $z_0 \in \Omega$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(z_0) = 0$

(ii) *f est nulle sur un voisinage de z_0*

(iii) *f est nulle sur Ω*

Corollaire 26. *Soient f et g holomorphes sur Ω un connexe de $\mathbb{C}$. Si f et g coïncident sur un voisinage d'un point de Ω, alors $f = g$.*

Théorème 27 (Zéros isolés)**.** *Soient Ω un connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur Ω et non identiquement nulle, alors les zéros de f sont isolés.*

Corollaire 28. *Si deux fonctions holomorphes coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, alors elles sont égales.*

Exemple 29. *Il n'existe pas de fonction holomorphe sur $D(0,1)$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3}$.*

Corollaire 30. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.*

Théorème 31 (Principe du maximum)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $|f|$ atteint son maximum en un point de Ω, alors f est constante.*

Corollaire 32 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant 1$, alors $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant |z|$. S'il existe $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ pour lequel $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe une constante λ de module 1 telle que $\forall z \in D(0,1)$, $f(z) = \lambda z$.*

Corollaire 33. *Les automorphismes (bijections biholomorphes) de $D(0,1)$ tels que $f(0) = 0$ sont de la forme : $z \mapsto e^{i\theta} z$, où $\theta \in \mathbb{R}$.*

Corollaire 34. $\mathrm{Aut}(D(0,1)) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right) \middle| \, \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1 \right\}$

4) Intégration à paramètre

Théorème 35. *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. Posons pour tout $z \in \Omega$ $F(z) = \int_X f(z,x) d\mu(x)$, et supposons que :*

(i) *$\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable*

(ii) *$\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe*

(iii) *Pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour tous $z \in K$ et $x \in X$, $|f(z,x)| \leqslant g(x)$*

Alors F est holomorphe et pour tous $z \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) d\mu(x)$$

Corollaire 36. *Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On définit sur P la fonction holomorphe :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

III Fonctions méromorphes

1) Séries de Laurent

Définition 37. Une série de Laurent est une série de la forme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \text{ où } (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

Théorème 38. *Soit f une fonction holomorphe sur une couronne centrée en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors, pour un lacet γ de la couronne entourant z_0, on a :*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k \quad \text{où} \quad a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Définition 39. Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f admet une singularité en a si il existe un voisinage U de a telle que f est définie et holomorphe sur $U \setminus \{a\}$.

Théorème 40. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors f vérifie une, et une seule, des propriétés suivantes :*

(i) *a est une singularité artificielle : f se prolonge au voisinage de a en une fonction holomorphe.*

(ii) *a est un pôle d'ordre m : il existe un entier $m \geqslant 1$ minimal tel que $(z-a)^m f(z)$ est borné au voisinage de a.*

(iii) *a est une sigularité essentielle : pour tout voisinage U de a dans Ω, $f(U \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 41. *(i) 2 est un pôle d'ordre 2 de $z \mapsto \frac{1}{(z-2)^2}$.*

(ii) 0 est une singularité essentielle de $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$.

Théorème 42. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$,. Alors f est développable en série de Laurent et :*

(i) a est une singularité artificielle $\Leftrightarrow \forall n < 0, a_n = 0$.

(ii) a est un pôle d'ordre $m \Leftrightarrow \forall n < m, a_n = 0$.

(iii) a est une singularité essentielle $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ pour une infinité de n négatifs.

2) Théorème des résidus

Définition 43. On dit qu'une fonction f est méromorphe sur Ω s'il existe $A \subset \mathbb{C}$ discret et fermé tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et les points de A sont des pôles de f.

Exemple 44. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ *est méromorphe.*

Définition 45. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, U un voisinage de z_0, et soit f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. On appelle résidu de f au point z_0 le nombre $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$, où a_{-1} est le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0.

Proposition 46. *Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors :*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

Si z_0 est un pôle simple de $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P(z_0) \neq 0$, alors :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Exemple 47. *Pour $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, $\mathrm{Res}(f,1) = 1$ et $\mathrm{Res}(f,2) = -1$.*

Théorème 48 (Théorème des résidus)**.** *Soient $S \subset \Omega$ fini, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S)$ et γ un lacet dans Ω ne rencontrant pas S, alors :*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{c \in S} \mathrm{Ind}_\gamma(c) \, \mathrm{Res}(f, c)$$

Exemple 49. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Exemple 50. *Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1} \, dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}$.*

3) Suite de fonctions méromorphes

Définition 51. Soient $A \subset \Omega$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur A si :

(i) À partir d'un certain rang, f_n n'a pas de pôles dans A.

(ii) $\sum\limits_{n>N} f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur A.

Théorème 52. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur Ω. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω, alors :*

(i) La somme f de cette série est méromorphe sur Ω.

(ii) La série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est $f^{(k)}$.

Corollaire 53. *Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

Développements

- Les biholomorphismes du disque unité (32,33,34) [Les14]
- Fonction Gamma (36,53) [Les14]
- Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus (50) [Tau06]

Références

[Cho20] M. Choulli. *Analyse complexe.* DeBoeck
[Tau06] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod
[Les14] A. Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses
[BMP05] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K
[Mai13] F. Maisonneuve. *Fonction d'une variable complexe.* Bréal